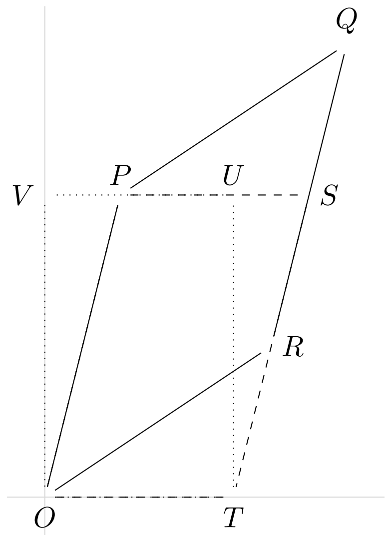
Université Paul Sabatier Année 2017-2018
Algèbre $1^{\text{ère}}$ année

Déterminants

Exercice 1.



1. Soient $a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A_t = \begin{pmatrix} a+tb & b \\ c+td & d \end{pmatrix}$. Comparer les déterminants de A et A_t.
2. Expliquer pourquoi les parallélogrammes $OPQR$, $OPST$ et $OTUV$ de la figure ci-contre ont la même aire.
3. Si $Q = (a, c)$ et $P = (b, d)$, calculer les coordonnées du point T (intersection de l'axe des abscisses avec la droite (QR)).
4. Retrouver l'interprétation géométrique du déterminant 2×2 vue en cours.
5. Calculer l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs $(7, 3)$ et $(1, 4)$

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix},$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_6 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_7 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{vmatrix},$$

Exercice 3. Calculer le volume du parallélépipède défini par les vecteurs $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 4)$ et $(1, 3, 1)$.

Exercice 4. On considère la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & -1 - \lambda \end{array} \right., \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculer la distance entre $\mathcal{D}$ et la droite $\mathcal{D}'$ passant par $(1, 2, -1)$ et de direction $(0, -1, 1)$.

Exercice 5. Sachant que 19 divise 2128, 4655, 1938 et 1862, montrer que 19 divise aussi $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

Exercice 6. Soit a un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de a la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.
2. Même question pour la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & a \\ a-1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminants des matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$$

et préciser pour quelles valeurs des paramètres elles sont inversibles.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient a, b, $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Calculer les déterminants suivants de taille n :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a+b & a & \dots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \dots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \dots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer par récurrence le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$